

从概率到几何 — Jean-Michel Bismut 的数学工作纵览

Xiaonan Ma (麻小南)

Jean-Michel Bismut 的数学工作涵盖两个数学分支：概率论与流形上的几何分析。来自概率论的思想在他的几何著作中发挥着重要作用。数学物理也是他诸多工作的动机。

在这篇文章中，我们将首先介绍 Bismut 的更具概率属性的工作。文章的第 2 部分将介绍 Bismut 在几何上的贡献。



Jean-Michel Bismut

1. 概率论工作

Jean-Michel Bismut 于 1967 年考入巴黎综合理工大学，他上了 Laurent Schwartz (施瓦兹) 的数学课，还有 Jacques Neveu 的概率论以及 Paul Malliavin (马利亚万) 的调和分析。1970 年以第一名的成绩毕业并进入 Corps des Mines¹⁾，Bismut 于 1973 年在 Jacques-Louis Lions (利翁斯) 与 Jacques Neveu 的指导下获得巴黎六大授予的数学国家博士学位，他的博士论文题目是《凸分析与概率 (Analyse convexe et probabilités)》。

我们将描述他博士论文的一个结果，其中方法将决定他后来的部分工作。

回顾一下，如果我们通过在适当条件下考虑泛函 $\int_0^T L(t, x_t, u_t)dt + \Phi(x_T)$ 的极值，来控制一个如下类型的常微分方程

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, u_t), \quad (1.1)$$

Pontryagin (庞特里亚金) 极大值原理允许我们构造一个相关的 Hamilton (哈密顿) 量 $H(t, x, p, u)$ 。我们在约束条件 $\frac{\partial}{\partial u} H = 0$ 下求解相空间 (x, p) 中对应的 Hamilton 方程。该解的 x 分量就是初始变分问题的极值解。

在他的博士论文 [1] 以及 [2] 中，Bismut 建立了 Pontryagin 极大值原理的随机版本。我们要控制下述 Itô (伊藤) 型的随机微分方程

$$dx_t = f(t, x_t, u_t)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t, x_t, u_t)\delta w^i, \quad (1.2)$$

其中 w 是 m 维 Brown (布朗) 运动， δw 是它的 Itô 微分， u 是一个仅依赖于 w 过去状态的控量。我们想找到泛函 $E[\int_0^T L(t, x_t, u_t)dt + \Phi(x_T)]$ 的极值，其中 E 表示期望。

新的 Hamilton 量可以写成如下形式：

$$\mathcal{H} = \langle p, f \rangle + \langle H, \sigma \rangle - L. \quad (1.3)$$

译自：<https://www.insmi.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/des-probabilites-la-geometrie-un-apercu-des-travaux-de-jean-michel-bismut>, DES PROBABILITÉS À LA GÉOMÉTRIE—UN APERÇU DES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE JEAN-MICHEL BISMUT, Xiaonan Ma. Copyright ©La Lettre de l'INSMI 2023. All rights reserved. Reprinted with permission. La Lettre de l'INSMI 授予译文出版许可。

作者的邮箱地址是 XIAONAN.MA@IMJ-PRG.FR.

1) 法国高级公务员的一种。—— 译注

在 (1.3) 中, H 表示仅依赖于过去状态的另一个过程. Bismut 建立了下述 Hamilton 方程组

$$\begin{aligned} dx &= \partial_p \mathcal{H} dt + \partial_H \mathcal{H} \cdot \delta w, & x(0) &= x_0, \\ dp &= -\partial_x \mathcal{H} dt + \partial_\sigma \mathcal{H} \cdot \delta w, & p_T &= -\partial_x \Phi(x_T), \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

与确定性控制情形类似, 受控过程 x 满足初始条件, 而对应的仅依赖于 Brown 运动过去状态的对偶过程 p 满足终止条件. 这个矛盾只是表面的: H 的选择让我们能解这个方程. 过程 p 满足的方程 (1.4) 现在被称为“倒向随机微分方程”.

Bismut 将随机 Pontryagin 极大值原理应用于带有二次判据的线性随机微分方程中 [4], 并且应用于经济增长的数学模型 [3].

上世纪 90 年代, Etienne Pardoux 与彭实戈发展了 Bismut 的思想, 构建了倒向随机微分方程理论, 并建立了这个随机极大值原理的各种版本. 这一原理已经成为金融数学的主要工具之一.

Bismut 在概率论上的另一工作 [5] 与 Malliavin 分析有关. Malliavin 基于无穷维谐振子证明了 Brown 运动的概率空间上的一个分部积分公式. Bismut 利用 Girsanov (吉尔萨诺夫) 定理给出了研究 Malliavin 分析的另一种方法, Girsanov 定理是关于 Brown 测度在某些随机平移下保持准不变性的公式, 以此可立即得出分部积分公式. 后来 Bismut 将他的上述方法与大偏差理论结合起来 [7]. 这些结果将在他的局部指标理论成就上扮演重要角色.

为解释 Bismut 的研究方向往指标理论的转变, 我们需要重申任意分部积分公式都源于某个对微分形式积分的 Stokes (斯托克斯) 公式. Bismut 将逐步尝试找出 Malliavin 分析的上同调内涵.

2. Atiyah-Singer 指标定理及其应用

Bismut 后续转向研究 Atiyah-Singer (阿蒂亚 - 辛格) 指标定理及其应用. 如果 X 是一个 n (偶数) 维紧流形, P 是一个椭圆微分算子, P 的指标则是 P 的核空间与余核空间维数之差. 该指标只取决于 P 的主象征. 1963 年的 Atiyah-Singer 定理通过与主象征相关的示性类¹⁾ 给出了 P 的指标的上同调表达式.

Atiyah 与 Singer 发现了作用在旋量与向量丛 E 的张量积的几何 Dirac (狄拉克) 算子. de Rham-Hodge (德拉姆 - 霍奇) 算子 $d + d^*$, Dolbeault (多比尔特)-Hodge 算子 $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ 都可以看成是 Dirac 算子. Atiyah, Bott 与 Patodi 证明了 Dirac 算子的指标定理可以推出任意椭圆算子的 Atiyah-Singer 定理.

2.1 超迹

我们有关于 Dirac 算子的指标定理的一个局部版本. 实际上对于这样的算子 D , 谱理论的论证表明

$$\text{Ind } D_+ = \text{Tr}_s [\exp(-tD^2)], \quad (2.1)$$

1) 与向量丛关联的上同调类称为示性类. —— 原注

对于任意 $t > 0$ 成立, 其中 Tr_s 表示超迹¹⁾ 如果 $P_t(x, x')$ 表示热算子 $\exp(-tD^2)$ 的相对于 Riemann (黎曼) 体积元 dx' 的 C^∞ 核, 我们有

$$\text{Ind } D_+ = \int_X \text{Tr}_s [P_t(x, x)] dx. \quad (2.2)$$

我们知道当 $t \rightarrow 0$ 时, $\text{Tr}_s [P_t(x, x)]$ 有如下类型的一致渐近展开

$$\text{Tr}_s [P_t(x, x)] = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ -n/2 \leq k \leq N}} a_k(x) t^k + \mathcal{O}(t^{N+1}), \quad (2.3)$$

其中这些系数 $a_k(x)$ 只依赖于局部的几何量. McKean 和 Singer 于 1967 年猜想: 如果 $D = d + d^*$, 那么“奇迹般的抵消”会发生在 $\text{Tr}_s [P_t(x, x)]$ 上, 对于 $k < 0$, $a_k = 0$ 并且 a_0 和陈省身从 TX 上的 Levi-Civita (列维-齐维塔) 联络出发构造的 Euler (欧拉) 形式一致. 该猜想很快被推广至所有的几何 Dirac 算子上. McKean-Singer 猜想 (即局部指标定理) 由 Patodi, Gilkey, Atiyah-Bott (博特)-Patodi 证明. Bismut 给出了局部指标定理与 Lefschetz (莱夫谢茨) 不动点定理的一个概率证明 [6]. 亏格 $\hat{A}$ 由 Paul Lévy (莱维) 的面积公式得到.

局部指标理论取得了长足的发展, 这里我们不再介绍. 特别是 Bismut 将其发展为探索与指标理论相去甚远的数学问题的一种工具. 我们在此描述 Bismut 关注过的两个问题.

(1) 对于 Dirac 算子簇, 指标定理有一个相对版本, 这时指标取值于底流形的偶数维上同调. Bismut [8] 给出了 Dirac 算子簇的指标定理的一个局部版本, 其中利用 Chern-Weil (陈省身-韦伊) 理论, 上同调类被对应的显式微分形式取代. Bismut 为此利用 Quillen (奎伦) 的超联络理论, 构造了对应于流形簇 (或纤维丛) 的所谓的 Bismut 超联络. 在 Berline-Getzler-Vergne 的书 [13] 中, 以更偏向表示论的不同视角重新处理了部分结果.

Bismut 超联络在所有后续构造中都有出现, 例如 Bismut-Cheeger $\tilde{\eta}$ 形式 [11], Bismut-Köhler 全纯解析挠率形式 [10, 14] 以及平坦向量丛的 Bismut-Lott 挠率形式 [16].

(2) 在 Quillen 工作的基础上, Bismut 与 Freed [9], Gillet-Soulé [10], Lebeau [12] 一道发展了 Dirac 算子簇的行列式理论、全纯向量丛的直像的带有 Quillen 度量的行列式线丛理论. 这些结果在 Gillet 与 Soulé 证明 Arakelov (阿拉克洛夫) 几何中的 Riemann-Roch (罗赫)-Grothendieck (格罗滕迪克) 定理时发挥着至关重要的作用.

2.2 行列式

我们现在更具体地描述上述某些结果. 假设 E 是一个复流形 X 上的一个全纯向量丛, 令 $H(X, E)$ 表示相应的 Dolbeault 复形的上同调, λ 表示该上同调的行列式²⁾. 将调和形式的 L_2 度量用 Ray (雷)-Singer 全纯解析挠率加以修正, 我们就得到了 λ 上的 Quillen 度量. 所谓 Ray-Singer 全纯解析挠率是 Hodge Laplace (拉普拉斯) 算子的行列式在不同次数上的加权交错乘积. 这些行列式由对应 zeta 函数在 0 点处的取值定义. 因此

1) 在一个 $\mathbb{Z}_2$ -分次向量空间 $E = E_+ \oplus E_-$ 上, 如果 τ 是定义该 $\mathbb{Z}_2$ -分次的对合映射, 则 $A \in \text{End}(E)$ 的超迹定义为 $\text{Tr}_s[A] = \text{Tr}[\tau A]$.——原注

2) 如果 E 是一个有限维复向量空间, 则 $\det E = \bigwedge^{\max} E$. 如果 E 还是 $\mathbb{Z}$ -分次的, $\det E$ 则是不同分次的行列式的交错乘积.——原注

解析挠率就是 Hodge Laplace 算子的一个谱不变量. 在纤维丛情形下, λ 是底流形上的 Hermite (埃尔米特) 全纯线丛. Bismut-Gillet-Soulé 曲率定理指出, 在适当条件下, 这个 Hermite 全纯线丛 λ 的曲率由局部显式公式给出, 这在微分形式层面上改进了行列式线丛的 Riemann-Roch-Grothendieck 定理.

Bismut-Lebeau 的工作聚焦于 Quillen 度量在嵌入映射的行为. 该工作构造了这些度量的局部比较的局部表达式, 利用了 Bismut-Gillet-Soulé 另一工作构造的流动形¹⁾. Bismut 在 [17] 中将该结果推广到嵌入与淹没的复合映射情形.

Ray-Singer 猜想描述了两个不变量是相等的, 其一是组合不变量 Reidemeister (赖德迈斯特) 挠率, 其二是 de Rham 理论中 Hodge Laplace 算子的谱不变量 Ray-Singer 实挠率. Bismut 与张伟平 [15] 沿着上述工作的相似思路, 给出了该猜想的一个新证明. Bismut-张的结果也可应用到任意的平坦向量丛, 其中修正项会出现. Bismut-张的证明利用了 Witten (威顿) Laplace 算子, 该算子是通常 Hodge 理论的基于体积元的修正的形变.

通过发明和应用新的数学对象, Bismut 为指标理论的革新做出了贡献, 以他命名的超联络就是一个例证. 他还发展了全新的技术, 比如 Bismut 和 Lebeau 在他们关于复嵌入的开创性论文中引入的技术, 其中谱理论、局部指标理论与概率论以出人意料的方式交汇融合, 并产生了诸多应用. 研究 Bergman 核的专著 [19] 就部分受到了 Bismut-Lebeau 文章的启发.

3. 亚椭圆 Laplace 算子

3.1 无处不在的谐振子

众所周知, 在 Schrödinger (薛定谔) 算子的谱局部化问题中, 为了建立该算子特征函数的局部化模型, 我们通常会化归到 Schrödinger 算子变成谐振子²⁾ 的模型情形.

我们想知道这个谐振子的出现是否与一个更为本质的谐振子的存在性相关联, 如果的确如此, 那么这个谐振子会有什么用. 这些是 Bismut 将要试图回答的问题.

3.2 Witten Laplace 算子与亚椭圆 Laplace 算子

亚椭圆 Laplace 算子的第一个版本出现在 Morse (莫尔斯) 理论的背景下. 在赋予 Morse 函数 f 的流形 X 上, 我们已经提到过 Witten 的 Laplace 算子 $\square_f^X$.

在 Riemann 流形 X 的闭路空间 LX 上, Bismut 提出了 Witten 的 Laplace 算子是否存在的问题. 由于 Hodge Laplace 算子在 LX 上不存在, Bismut 想构造 Witten 形变的半经典版本. Bismut 最终带来的并不是构造 LX 上 Hodge 理论的 Witten 形变, 而是构造 X 上通常的 Hodge Laplace 算子的亚椭圆形变 [18]. 在这个构造过程中, 有一个额外参数 $b > 0$, 对应了 LX 上 Witten 形变的参数.

设 $Y^\mathcal{H}$ 是生成测地流的余切丛 $\mathcal{X}$ 上的向量场, $L_{Y^\mathcal{H}}$ 是关于 $Y^\mathcal{H}$ 的 Lie 导数, 亚椭圆 Laplace 算子 L_b^X 是 $\mathcal{X}$ 上形如

$$L_b^X = \frac{H}{b^2} - \frac{L_{Y^\mathcal{H}}}{b} + \dots$$

1) 他们将这个流动形称为 Bott-Chern 流动形. —— 译注

2) $\mathbb{R}$ 上的谐振子是算子 $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1$. —— 译注

的微分算子, 其中 H 是余切丛的一个谐振子, $\cdots$ 表示低阶项. 由 Hörmander (赫尔曼德尔) 的理论可知, 算子 $\frac{\partial}{\partial t} + L_b^X$ 是亚椭圆的.

Bismut 与 Lebeau [20] 建立了亚椭圆 Laplace 算子的解析性质. 他们书中的主要结果正如所料, 说的是 de Rham 理论中的 Ray-Singer 解析挠率在亚椭圆形变下保持不变.

我们在这里强调 3 点.

- (1) 算子 L_b^X 是统计力学中熟知的 Fokker-Planck 算子的一个几何版本.
- (2) 当 $b \rightarrow 0$ 时, Laplace 算子 L_b^X 在适当的意义下收敛到 X 上通常的 Hodge Laplace 算子 $\square^X/2$.
- (3) 朴素地感觉, 当 $b \rightarrow +\infty$ 时, L_b^X 会收敛到算子 $-L_Y$. Bismut-Lebeau 的解析工作主要关注的是 $b \rightarrow 0$ 时的收敛情况.

亚椭圆 Laplace 算子给出了 Laplace 算子与测地流之间的一种自然过渡, Bismut 在后续工作中将利用这个事实研究迹公式.

3.3 迹公式与轨道积分

1950—1978 年发展起来的 Selberg (塞尔伯格) 迹公式与 Harish-Chandra (哈里希-钱德拉) 关于轨道积分的 Plancherel (普朗谢雷尔) 公式在表示论与数论中发挥着根本性的作用. 它们给出了一种算法, 可以借助轨道积分计算某些作用于 G/Γ 上 L^2 函数空间的算子的迹, 其中 Γ 是 G 的算术子群.

Bismut [21] 从微分几何观点研究这些轨道积分, 他证明了亚椭圆 Laplace 算子的另一版本可以使这个研究变得可能. 尽管对一般 Riemann 流形的亚椭圆形变, 仅会有某些谱不变量保持不变, 但是 Bismut 将证明对于他构造的亚椭圆形变, 且特定于局部对称空间上, Laplace 算子的谱根本上保持不变. 这个观点有助于他给出关于群上 Laplace 算子即 Casimir (凯西米尔) 算子的半单轨道积分的局部显式几何公式. 为了构造这个新的亚椭圆形变, Bismut 利用了由 Kostant (科斯坦) 引入的另一个 Dirac 算子.

文献 [23] 给出了 Bismut 这些结果的详细回顾, 以及由申述得到的这些公式的一个应用: 1986 年提出的 Fried 猜想的解决, 即对于非紧形局部对称空间, 解析挠率与 Ruelle (吕埃尔) 的动力 zeta 函数在 0 点处的取值相等.

3.4 复几何中的亚椭圆 Laplace 算子

在复几何中, Bismut 构造了亚椭圆 Laplace 算子的另一版本. 其动机有所不同. 这涉及到克服在由椭圆 Laplace 算子展开的局部指标的计算中不可避免的局部障碍的问题. 申述, 韦兆汀与 Bismut [22, 24] 证明了一个取值在 Bott-Chern 上同调的 Riemann-Roch-Grothendieck 定理, 该定理可以应用到任意的紧复流形以及对应的凝聚层上. 亚椭圆 Laplace 算子在上述主要定理的证明中发挥着根本作用.

4. 结论

Bismut 在与 Michael Atiyah, Paul Malliavin, Daniel Quillen 的交往中直接受到了他们的影响.

此外, Bismut 在奥赛巴黎第十一大学的数学系度过了他的数学生涯. 该系在他作为

数学家的成长过程中发挥着至关重要的作用，这要归功于那里特别的学术氛围，以及他在那里结交的朋友们。

从 1996—2008 年，Bismut 与 Gerd Faltings (法尔廷斯) 一起担任《数学发明 (Inventiones Mathematicae)》的主编。他曾是国际数学联盟执委会委员 (1998—2002) 和副主席 (2002—2006)。

通过在倒向随机微分方程, Malliavin 分析, 指标理论, 亚椭圆 Laplace 算子的工作, Bismut 对概率论, 微分几何, 流形上的分析做出了根本性的贡献, 他的工作在数论与表示论中也有重要应用。Bismut 为将概率论置身于当代数学的核心中做出了非凡贡献。

我们希望本文对 Bismut 工作的描述可以让读者对他数学成就的深度与广度有一些感受。

编注 J.-M. Bismut 的照片引自邵逸夫奖网站 <https://www.shawprize.org/laureates/mathematical-sciences/2021>。

参考文献

- [1] Bismut, J.-M. Analyse convexe et probabilités. Thèse, Université Paris VI, 1973.
- [2] Bismut, J.-M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Anal. Appl., 44: 384–404, 1973. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(73\)90066-8](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(73)90066-8).
- [3] Bismut, J.-M. Growth and optimal intertemporal allocation of risks. J. Econom. Theory, 10(2): 239–257, 1975.
- [4] Bismut, J.-M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. SIAM J. Control Optimization, 14(3): 419–444, 1976.
- [5] J.-M. Bismut, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander’s conditions, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 56 (1981), no. 4, 469–505.
- [6] Bismut, J.-M. The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I. The index theorem. II. The Lefschetz fixed point formulas. J. Funct. Anal., 57(1): 56–99, 329–348, 1984.
- [7] Bismut, J.-M. Large deviations and the Malliavin calculus, volume 45 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984, viii+216 pp.
- [8] Bismut, J.-M. The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs. Invent. Math., 83(1): 91–151, 1986.
- [9] Bismut, J.-M. and Freed, D. The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem. Comm. Math. Phys., 107(1): 103–163, 1986.
- [10] Bismut, J.-M., Gillet, H., and Soulé, C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II, Direct images and Bott-Chern forms. III, Quillen metrics on holomorphic determinants. Comm. Math. Phys., 115, 79–126, 301–351, 1988.
- [11] Bismut, J.-M. and Cheeger, J. η -invariants and their adiabatic limits. J. Amer. Math. Soc., 2(1): 33–70, 1989.
- [12] Bismut, J.-M. and Lebeau, G. Complex immersions and Quillen metrics. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 74, ii+298 pp. (1992), 1991.
- [13] Berline, N., Getzler, E., and Vergne, M. Heat kernels and Dirac operators. Grundle Math. Wiss. Band 298. Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+369 pp.
- [14] Bismut, J.-M. and Köhler, K. Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas. J. Algebraic Geom., 1(4): 647–684, 1992.

- [15] Bismut, J.-M. and Zhang, W. An extension of a theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, 205, 235 pp, 1992. With an appendix by François Laudenbach.
- [16] Bismut, J.-M. and Lott, J. Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(2): 291–363, 1995.
- [17] Bismut, J.-M. Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms. *Astérisque*, 244, viii+275 pp, 1997. ISSN 0303-1179.
- [18] Bismut, J.-M. The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2): 379–476, 2005.
- [19] Ma, X. and Marinescu, G. Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels, volume 254 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, xiv+422 pp.
- [20] Bismut, J.-M. and Lebeau, G. The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics, volume 167 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008, x+367 pp.
- [21] Bismut, J.-M. Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals, volume 177 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011, xii+330 pp.
- [22] Bismut, J.-M. Hypoelliptic Laplacian and Bott-Chern cohomology, A theorem of Riemann-Roch-Grothendieck in complex geometry. volume 305 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer, Cham, 2013, xvi+203 pp. doi :10.1007/978-3-319-00128-9.
- [23] Ma, X. Geometric hypoelliptic Laplacian and orbital integrals [after Bismut, Lebeau and Shen]. *Astérisque* 407, Exp. No. 1130, 333–389. 2019. doi: 10.24033/ast. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135.
- [24] Bismut, J.-M., Shen, S., and Wei, Z. Coherent sheaves, superconnections, and RRG. arXiv e-prints, arXiv: 2102.08129, 2021, 161 pp.

(邵国宽 译 姚一隽 校)

更正与补充

2022 年第 4 期文“从零熵到正熵”有如下更正与补充.

页	行	误	正	页	行	误	正
306	5	递归集	回复集	309	19	返回集	回复集
308	6	横截同宿相交	横截同宿交	309	21	返回的	回复的
308	16	横截同宿	横截同宿交	309	22	声称	断言
308	图 5 注	横截同宿	横截同宿交	319	20	陷俘	内陷
309	11	拓扑熵消失	拓扑熵退化	319	33	最终的周期 2	最终周期 2
309	17	返回的	回复的	321	4	最终的周期 2	最终周期 2

又，按本文作者要求，补充两位原作者与 Charles Tresser 合作的一篇已被接受发表的最新的文献：

[CPT] S. Crovisier, E. Pujals, C. Tresser, Mildly dissipative diffeomorphisms of the disc with zero entropy. ArXiv:2005.14278. To appear in *Acta Mathematica*.