Laplacien hypoelliptique géométrique et intégrales orbitales

d'après Bismut, Lebeau et Shen

Xiaonan Ma

IMG-PRG,
Université Paris 7

Séminaire Bourbaki, le 11 mars 2017

Laplacien et noyau de la chaleur

- (M, g^{TM}) variété riemannienne compacte C^∞.
- (F, h^F) fibré vectoriel hermitien sur M, ∇^F connexion hermitienne sur F.
- Laplacien (opérateur elliptique auto-adjoint d'ordre 2)

$$\Delta^F := -\nabla^{F,*}\nabla^F : C^\infty(M, F) \to C^\infty(M, F).$$

- Exemple : Sur $\mathbb{R}^m$, $\Delta = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.
- Pour $t > 0$,

$$\mathrm{Tr}[e^{t\Delta^F}] = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_j} = \int_M \mathrm{Tr}[e^{t\Delta^F}(x,x)]dx.$$

- **Question** : Évaluer 'explicitement' $\mathrm{Tr}[e^{t\Delta^F}]$?

Groupe de Lie réductif

- G groupe de Lie réductif connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

$K \subset G$ sous-groupe compact maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

- Décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$.
- $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire symétrique Ad_G-inv. t.q.

$$B|_{\mathfrak{p}} > 0, \; B|_{\mathfrak{k}} < 0, \; \mathfrak{p} \perp \mathfrak{k}.$$

- Exemple : $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \det A = 1\}$,
  $K = \mathrm{SO}(2)$.
  $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} a & \lambda \\ \lambda & -a \end{bmatrix} : a, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
  $B(u,v) = 2\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}^2}[uv], \; u, v \in \mathrm{sl}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

Opérateur de Casimir et espace symétrique

- Opérateur de Casimir $C^{\mathfrak{g}}$: opérateur différentiel d'ordre 2 invariant sur G.
- $X = G/K$ espace symétrique, $\exp : \mathfrak{p} \simeq X$.
- $\rho^E : K \to \mathrm{U}(E)$ une représentation unitaire de K.
  $F = G \times_K E$ fibré vectoriel sur X.
- Sur $C^\infty(X, F) = C^\infty(G, E)^K$, on a

$$C^{\mathfrak{g}} = -\Delta^F + C^{\mathfrak{k},F},$$

où $C^{\mathfrak{k},F} \in \mathrm{End}(F)$. Si $F = \mathbb{C}$, $C^{\mathfrak{k},F} = 0$.

Espaces localement symétriques

- Pour $c \in \mathbb{R}$ fixé, on pose
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} C^{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} c.$$
- $\Gamma \subset G$ sous-groupe discret sans torsion cocompact.
Γ agit librement sur X et $Z = \Gamma \backslash X$ compacte.
- $Z = \Gamma \backslash X$ espace localement symétrique.
$\Gamma = \pi_1(Z)$ et X est le revêtement universel de Z.
- $F = G \times_K E$ descend à Z.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[e^{-t\mathcal{L}^Z}] &= \int_Z \mathrm{Tr}[e^{-t\mathcal{L}^Z}(z,z)]dz \\ &= \int_{\Gamma \backslash X} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Tr}[\gamma e^{-t\mathcal{L}^X}(\gamma^{-1}\widetilde{z}, \widetilde{z})]dz. \end{aligned}$$

Formule des traces de Selberg

- $Z(\gamma) \subset G$ centralisateur de $\gamma \in G$ dans G.
- Pour $\gamma \in G$ semisimple, l'intégrale orbitale $\mathrm{Tr}^{[\gamma]}[e^{-t\mathcal{L}^X}]$ définie comme une intégrale sur $Z(\gamma)\backslash G$.
- $\Gamma \subset G$ sous-groupe discret sans torsion cocompact.
- Selberg (1960) : $\forall\ \gamma \in \Gamma$, γ est semisimple.
- Formule des traces de Selberg (1956) : $Z = \Gamma\backslash X$,

$$\mathrm{Tr}[e^{-t\mathcal{L}^Z}] = \sum_{[\gamma]\in[\Gamma]} \mathrm{Vol}\Big(\Gamma \cap Z(\gamma)\backslash Z(\gamma)\Big) \,\mathrm{Tr}^{[\gamma]}[e^{-t\mathcal{L}^X}].$$

Formule vraie pour les noyaux invariants 'convenables'.

- On peut supposer

$$\gamma = e^a k^{-1},\ \mathrm{Ad}(k)a = a,\ a \in \mathfrak{p},\ k \in K.$$

- $\mathfrak{z}(\gamma)$ algèbre de Lie de $Z(\gamma)$.

$\mathfrak{z}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \oplus \mathfrak{k}(\gamma)$ avec $\mathfrak{p}(\gamma) = \mathfrak{z}(\gamma) \cap \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k}(\gamma) = \mathfrak{z}(\gamma) \cap \mathfrak{k}.$

Théorème (Bismut 2011) : Il existe une fonction explicite $J_\gamma(Y), Y \in \mathfrak{k}(\gamma)$ telle que

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}^X}\right] = (2\pi t)^{-\dim \mathfrak{p}(\gamma)/2} e^{-\frac{|a|^2}{2t}}$$
$$\int_{\mathfrak{k}(\gamma)} J_\gamma(Y)\,\mathrm{Tr}^E\left[\rho^E(k^{-1})e^{-i\rho^E(Y)}\right] e^{-\frac{|Y|^2}{2t}} \frac{dY}{(2\pi t)^{\dim \mathfrak{k}(\gamma)/2}}.$$

On intègre sur une partie de $\mathfrak{k}$, et pas sur $\mathfrak{p}$! Si $\gamma = 1$, $\mathfrak{k}(\gamma) = \mathfrak{k}$.

- $\mathfrak{z}_0^\perp \perp \mathfrak{z}_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(a)) \subset \mathfrak{g}$.
  $\mathfrak{z}_0^\perp(\gamma) \perp \mathfrak{z}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \oplus \mathfrak{k}(\gamma) \subset \mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_0^\perp(\gamma) = \mathfrak{p}_0^\perp(\gamma) \oplus \mathfrak{k}_0^\perp(\gamma)$.
- Pour Θ matrice symétrique, $\widehat{A}(\Theta) = \det^{1/2}\left[\frac{\Theta/2}{\sinh(\Theta/2)}\right]$.

La fonction $J_\gamma(Y), Y \in \mathfrak{k}(\gamma)$

$$J_\gamma(Y) = \frac{1}{\left|\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma))|_{\mathfrak{z}_0^\perp}\right|^{1/2}} \cdot \frac{\widehat{A}(i\,\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{p}(\gamma)})}{\widehat{A}\big(i\,\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{k}(\gamma)}\big)} \cdot$$

$$\left[\frac{1}{\det(1-\mathrm{Ad}(k^{-1}))|_{\mathfrak{z}_0^\perp(\gamma)}} \frac{\det\Big(1-\exp(-i\,\mathrm{ad}(Y))\,\mathrm{Ad}(k^{-1})\Big)|_{\mathfrak{k}_0^\perp(\gamma)}}{\det\Big(1-\exp(-i\,\mathrm{ad}(Y))\,\mathrm{Ad}(k^{-1})\Big)|_{\mathfrak{p}_0^\perp(\gamma)}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\gamma = 1$, alors $J_1(Y) = \frac{\widehat{A}(i\,\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{p}})}{\widehat{A}(i\,\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{k}})}$ pour $Y \in \mathfrak{k}(1) = \mathfrak{k}$.

Intégrales orbitales et théorème de l'indice

- Théorème d'Atiyah-Singer (1963) :

$$\operatorname{Ind}(D) = \int_M \widehat{A}(TM)\,\operatorname{ch}(F).$$

- Fonction $\widehat{A}$ évaluée sur $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}$ avec des rôles différents apparaît dans la formule de Bismut.
- La formule donne un lien direct entre théorie de l'indice et formule des traces.

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

- $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $X = G/K$ demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im} z > 0\}$.
- Sur $C^\infty(X, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{L}^X = -\frac{1}{2}\Delta^X - \frac{1}{8}.$$

- $Z = \Gamma \backslash X$ surface de Riemann compacte.

Formule des traces de Selberg (1956)

- On retrouve la formule de Selberg

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[e^{t\Delta^Z/2}] &= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \text{ primitif},\\ [\gamma]=[e^a],\, a\neq 0}} |a| \sum_{k\in\mathbb{N},\, k\neq 0} \mathrm{Tr}^{[e^{ka}]}[e^{t\Delta^X/2}] \\
&\quad + \mathrm{Vol}(Z)\, \mathrm{Tr}^{[1]}[e^{t\Delta^X/2}] \\
&= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \text{ primitif},\\ [\gamma]=[e^a],\, a\neq 0}} |a| \sum_{k\in\mathbb{N},\, k\neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{2\sinh(\frac{k|a|}{2})} e^{-\frac{k^2|a|^2}{2t}-\frac{t}{8}} \\
&\quad + \frac{\mathrm{Vol}(Z)}{2\pi t} e^{-t/8} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2t} \frac{y/2}{\sinh(y/2)} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}.
\end{aligned}$$

Terme à gauche de théorie spectrale,
Terme à droite dépend des géodésiques fermées.

Théorie de Plancherel de Harish-Chandra

- 1950–1970, Harish-Chandra : algorithme pour réduire le calcul d'intégrales orbitales aux groupes de Lie de dimension inférieure par méthode de séries discrètes. Fonctionne pour les noyaux invariants.
- Si $\gamma = 1$, formule assez précise

$$\mathrm{Tr}^{[1]}\left[e^{-t\mathcal{L}^X}\right] = \sum_{j=1}^{l} \sum_{a_I^* \in \widehat{H}_{jI}, \text{régulier}} \int_{a_R^* \in \widehat{H}_{jR}} e^{-\frac{t}{2}(C^{\mathfrak{g},\pi_{a^*}}+c)} \dim(V_{a_I^*} \otimes E)^{K\cap M_j} p^{H_j}(a_I^*, a_R^*) da_R^*.$$

- Difficile de déterminer tous sous-groupes paraboliques, séries discrètes, et densité de Plancherel p^{H_j} !

Int. sur partie de $\mathfrak{p}$. Moins explicite que formule de Bismut.

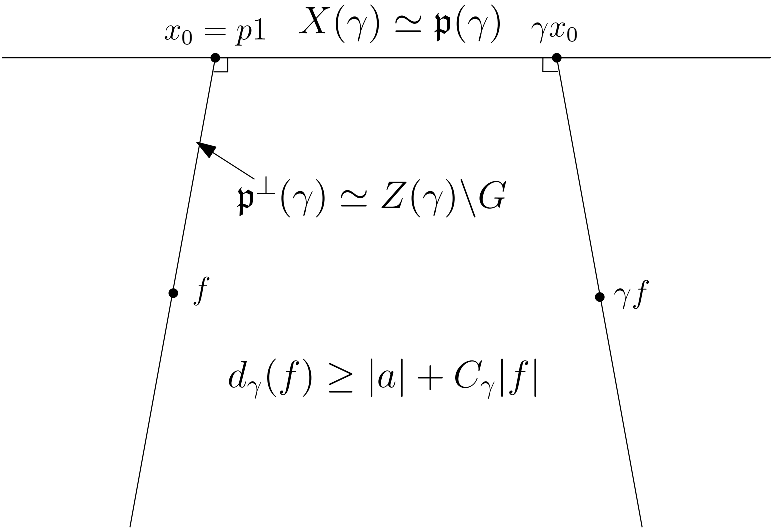
Fonction de déplacement et semisimplicité

- Fonction de déplacement $d_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$ est convexe sur $X = G/K$.
- $\gamma \in G$ semisimple ssi d_γ atteint son minimum.
- $p : G \to X = G/K$ projection.
- γ semisimple : $\gamma = e^a k^{-1},\ \mathrm{Ad}(k)a = a,\ a \in \mathfrak{p},\ k \in K$. $\mathfrak{p}^\perp(\gamma)$ l'espace orthogonale de $\mathfrak{p}(\gamma) = \mathfrak{z}(\gamma) \cap \mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{p}$.

Proposition

$X(\gamma) = \{z \in X : d_\gamma(z) = \inf_{y \in X} d_\gamma(y)\}$ totalement géodésique est l'espace symétrique $Z(\gamma)/K(\gamma)$.

- Coordonnées normales à $X(\gamma)$ dans X :



Forme géométrique de l'intégrale orbitale

- $|e^{-t\mathcal{L}^X}(x,x')| \leq Ce^{-c'd^2(x,x')}$.
- Bismut : Forme géométrique de l'intégrale orbitale

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}[e^{-t\mathcal{L}^X}] = \int_{\mathfrak{p}^\perp(\gamma)} \mathrm{Tr}[\gamma e^{-t\mathcal{L}^X}(e^f, \gamma e^f)] r(f)\, df.$$

L'idée est de localiser l'intégrale près de $X(\gamma)$ via déformation hypoelliptique avec un paramètre de localisation $b \to +\infty$.

Histoire abrégée du laplacien hypo. géométrique

- En 2002, Bismut a construit laplacien hypoelliptique d'origine géométrique agissant sur l'espace total du fibré cotangent d'une variété riemannienne. Ce laplacien interpole entre le laplacien elliptique classique et le générateur du flot géodésique.
- Laplacien hypo. géom. de Bismut : $\mathcal{L}_b = \frac{1}{b^2}\alpha + \frac{1}{b}\beta + \vartheta$.

$$\alpha = \frac{1}{2}(-\Delta^V + |p|^2 - m + \cdots), \quad \beta = -L_Y + \cdots ,$$

  Y générateur du flot géod., dots et ϑ termes géom.,
- Bismut-Lebeau (2008) : fondements analytiques de la théorie.
- Sur $\mathbb{R}^{2m}$, $\mathcal{L}_b|_{C^\infty(\mathbb{R}^{2m})}$ coïncide avec l'opérateur de Fokker-Planck.

Cohomologie et oscillateur harmonique

- $A(V^*) = \Lambda^\bullet(V^*) \otimes S^\bullet(V^*)$ formes polynomiales sur espace vectoriel réel V, d^V opérateur de de Rham.
- Y champ de vecteurs radial sur V. Formule de Cartan :

$$L_Y = [d^V, i_Y] = N^{A(V^*)}.$$

  Lemme de Poincaré pour $(A(V^*), d^V)$: Cohomologie de $(A(V^*), d^V)$ concentrée en degré 0 et égale à $\mathbb{R}$.
- Via isomorphisme de Bargmann $B : L_2(V) \to S^\bullet(V^*)$,

$$\overline{d} := B^{-1} d^V B, \quad \overline{d}^* := B^{-1} i_Y B.$$

Laplacien : $\left[\overline{d}, \overline{d}^*\right] = \frac{1}{2}\Big(- \Delta^V + |Y|^2 - n\Big) + N^{\Lambda^\bullet(V^*)}.$

Opérateur de Dirac de Kostant

- $c(\mathfrak{g}), \widehat{c}(\mathfrak{g})$ algèbres de Clifford de $(\mathfrak{g}, B), (\mathfrak{g}, -B)$.
- Ces algèbres agissent sur $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*)$.
- Kostant a défini opérateur de Dirac $\widehat{D}^\mathfrak{g} \in \widehat{c}(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, tel que
$$\widehat{D}^{\mathfrak{g},2} = -C^\mathfrak{g} - c.$$
- $\widehat{D}^\mathfrak{g}$ opérateur différentiel ordre 1 sur G.

Laplacien hypoelliptique

- On pose

$$\mathfrak{D}_b = \widehat{D}^{\mathfrak{g}} + ic\Big([Y^{\mathfrak{k}}, Y^{\mathfrak{p}}]\Big) + \frac{\sqrt{2}}{b}\Big(\overline{d}^{\mathfrak{p}} - i\overline{d}^{\mathfrak{k}} + \overline{d}^{\mathfrak{p}*} + i\overline{d}^{\mathfrak{k}*}\Big).$$

- $$G \times_K \mathfrak{p} = TX, \text{ et } N = G \times_K \mathfrak{k}.$$

  Soit $\widehat{\mathcal{X}}$ l'espace total de $TX \oplus N$ sur X.
- $\widehat{D}^{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{D}_b$ induisent opérateurs $\widehat{D}^{\mathfrak{g},X}$, $\mathfrak{D}_b^X$ agissant sur

$$\begin{aligned} &C^\infty(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\pi}^*(\Lambda^\bullet(T^*X \oplus N^*) \otimes F)) \\ &\simeq C^\infty(X, \Lambda^\bullet(T^*X \oplus N^*) \otimes S^\bullet(T^*X \oplus N^*) \otimes F) \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}_b^X = -\frac{1}{2}\widehat{D}^{\mathfrak{g},X,2} + \frac{1}{2}\mathfrak{D}_b^{X,2}$.
- $Y = Y^{TX} + Y^N \in \widehat{\pi}^*(TX \oplus N), Y^{TX} \in TX, Y^N \in N$.

Théorème (Bismut) On a

$$\mathcal{L}_b^X = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{\beta}{b} + \vartheta.$$

$$\begin{aligned}
\alpha =& \frac{1}{2}\Big(- \Delta^{TX\oplus N} + |Y|^2 - m - n\Big) + N^{\Lambda^\bullet(T^*X\oplus N^*)},\\
\beta =& \nabla_{Y^{TX}} + \widehat{c}(\mathrm{ad}(Y^{TX}))\\
&\quad - c(\mathrm{ad}(Y^{TX}) + i\theta \mathrm{ad}(Y^N)) - i\rho^E(Y^N),\\
\vartheta =& \frac{1}{2}\Big|[Y^N, Y^{TX}]\Big|^2.
\end{aligned}$$

Par Hörmander, $\mathcal{L}_b^X$ hypoelliptique.

- $q^X_{b,t}\big((x,Y),(x',Y')\big)$, $(x,Y),(x',Y')\in\widehat{\mathcal{X}}$ noyau pour $e^{-t\mathcal{L}^X_b}$.

Théorème (Bismut)

Pour $0<\epsilon\le M$, $\exists\ C,C'>0$ t.q. $\forall\ 0<b\le M, \epsilon\le t\le M$, $(x,Y),(x',Y')\in\widehat{\mathcal{X}}$,

$$\Big|q^X_{b,t}\big((x,Y),(x',Y')\big)\Big| \le C\exp\Big(-C'\Big(d^2(x,x')+|Y|^2+|Y'|^2\Big)\Big).$$

Quand $b\to 0$,

$$q^X_{b,t}\big((x,Y),(x',Y')\big)\to e^{-t\mathcal{L}^X}(x,x')\pi^{-(m+n)/2}e^{-\frac{1}{2}\left(|Y|^2+|Y'|^2\right)}.$$

Résultat d'analyse difficile.

Invariance de l'intégrale orbitale

- Intégrale orbitale hypoelliptique $\mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}[e^{-t\mathcal{L}_b^X}]$: intégrale sur $\mathfrak{p}^\perp(\gamma) \times \mathfrak{g}$.

Théorème (Bismut) : $\forall b > 0, t > 0,$

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}^X}\right] = \mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}_b^X}\right].$$

Preuve

$$\lim_{b\to 0} \mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}_b^X}\right] = \mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}^X}\right].$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}_b^X}\right] = -\frac{t}{2} \mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}\left[\left[\mathfrak{D}_b^X, e^{-t\mathcal{L}_b^X} \frac{\partial}{\partial b}\mathfrak{D}_b^X\right]\right] = 0.$$

Apparition de $J_\gamma(Y)$

- Quand $b \to +\infty$, $\mathrm{Tr}_s^{[\gamma]}\left[e^{-t\mathcal{L}_b^X}\right]$ se localise près des géodésiques dans $X(\gamma)$ associées au minimum de d_γ.
- Techniques d'indice local permettent de montrer la convergence vers la contribution d'un opérateur modèle sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{g}$.
- Un calcul donne la formule pour $J_\gamma(Y)$, $Y \in \mathfrak{k}(\gamma)$.

Exemple : $G = \mathbb{R}$

- $G = \mathbb{R}$ alors $K = \{0\}$, on a $X = \mathbb{R}$, et $\mathcal{L}^X = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
  $p_t(x, x')$ le noyau de $e^{t\Delta^{\mathbb{R}}/2}$.
- Par déf. de l'int. orb. $\mathrm{Tr}^{[a]}\left[e^{-t\mathcal{L}^X}\right] = p_t(0, a)$.
- $N = 0$, $\widehat{\mathcal{X}} = TX \oplus N = T\mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
  On a pour $(x, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_b^X = M_b + \frac{N^{\Lambda^\bullet(\mathbb{R})}}{b^2}, M_b = \frac{1}{2b^2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 - 1\right) + \frac{y}{b}\frac{\partial}{\partial x}.$$

- (F, ∇) fibré vectoriel plat sur variété compacte M.
- $(\Omega^\bullet(M, F), d)$ complexe de de Rham de cohomologie $H^\bullet(M, F)$.
- g^{TM} métrique riemannienne sur M, et h^F métrique hermitienne sur F. d^* adjoint formel de d.

$$D = d + d^*.$$

- Torsion analytique de Ray-Singer (1971)

$$T(g^{TM}, h^F) = \prod_{j=0}^{\dim M} \det \left(D^2|_{\Omega^j(M,F)} \right)^{(-1)^j j/2}.$$

- Si $\dim M$ impaire, et $H^\bullet(M, F) = 0$, alors $T(g^{TM}, h^F)$ ne dépend pas de g^{TM}, h^F. On le note $T(F)$.

Conjecture de Fried (1986)

- En 1986, pour une variété hyperbolique orientable compacte, Fried a identifié la valeur en zéro de fonction zêta dynamique de Ruelle (associée aux géodésiques fermées) à la torsion analytique.
- Fried a conjecturé que ce résultat reste valable pour les espaces localement homogènes compacts.
- En 1991, Moscovici-Stanton ont fait des progrès importants sur la conjecture de Fried pour les espaces localement symétriques.

Le cas des espaces localement symétriques

- G groupe réductif connexe, $X = G/K$ espace symétrique.
  $\Gamma \subset G$ discret sans torsion cocompact. $Z = \Gamma\backslash X$ et $\pi_1(Z) = \Gamma$.
- $\rho : \Gamma \to U(\mathbf{q})$ représentation unitaire. $F = X \times_\Gamma \mathbb{C}^{\mathbf{q}}$ fibré plat sur $Z = \Gamma\backslash X$.
- On suppose $m = \dim Z$ est impaire, et $H^\bullet(Z, F) = 0$.

- Pour $[\gamma] \in [\Gamma]\backslash\{1\}$, $B_{[\gamma]}$ espace des géodésiques fermés dans Z dans classe d'homotopie $[\gamma]$, $l_{[\gamma]}$ longueur des géodésiques associées.
  Le groupe $\mathbb{S}^1$ agit localement libre sur $B_{[\gamma]}$ par rotation.
  $$n_{[\gamma]} = \left|\mathrm{Ker}\left(\mathbb{S}^1 \to \mathrm{Diff}(B_{[\gamma]})\right)\right| \text{ multiplicité .}$$

Théorème (S. Shen 2016) : Sol. de la conjecture de Fried

$$R_\rho(\sigma) = \exp\left(\sum_{[\gamma]\in[\Gamma]\backslash\{1\}} \mathrm{Tr}[\rho(\gamma)]\frac{\chi_{\mathrm{orb}}(\mathbb{S}^1\backslash B_{[\gamma]})}{n_{[\gamma]}} e^{-\sigma l_{[\gamma]}}\right)$$

est fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe en 0 et

$$R_\rho(0) = T(F)^2.$$

- Partie la plus difficile : exprimer $R_\rho(\sigma)$ comme produit de déterminants d'opérateurs de Casimir décalés, et identifier la valeur en 0.
- Shen établit d'abord que $R_\rho(\sigma)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe pour $\mathrm{Re}(\sigma) \gg 1$. Quand $\sigma \to 0$,
$$R_\rho(\sigma) = C_\rho T(F)^2 \sigma^{r_\rho} + \mathcal{O}(\sigma^{r_\rho+1}).$$
- Si $H^\bullet(Z,F) = 0$, Shen montre aussi
$$C_\rho = 1, r_\rho = 0.$$

  Ingrédients : formule des traces de Selberg et formule de Bismut.
  Théorie de représentation unitaire sur les groupes réductifs : Vogan-Zuckerman, Salamanca-Riba, Hecht-Schmid.

Merci beaucoup !